

Воеводин Вл.В. , Гончарский А.В. , Романов С.Ю.

ЗАДАЧА ВОЛНОВОЙ ДИАГНОСТИКИ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

*Научно-исследовательский и вычислительный центр
(НИВЦ) МГУ им. М.В. Ломоносова
г. Москва
E-mail:voevodin@parallel.ru*

Аннотация

Работа посвящена разработке методов и алгоритмов решения обратной задачи волновой диагностики неоднородностей в однородных средах. Обратная задача рассмотрена в линейаризованной постановке для уравнения Гельмгольца с неизвестным коэффициентом. Предложен метод синтезированной апертуры и разработан эффективный алгоритм решения обратной задачи. Разработана схема проведения лабораторного эксперимента и диагностическая аппаратура по сбору экспериментальных данных. Приведен результат решения обратной задачи на реальных данных лабораторного эксперимента. Полученные результаты показали высокую эффективность метода на экспериментальных данных.

Структура предложенного алгоритма допускает выделение типовых алгоритмических структур. Поэтому в рассматриваемой задаче представляется перспективным использование реконфигурируемых многопроцессорных вычислительных систем с динамически перестраиваемой архитектурой.

1. Введение. В статье рассмотрена обратная задача зондирования неоднородных включений в однородной среде электромагнитными, акустическими волнами. Методы ее решения находят применение в таких областях как исследования приповерхностных слоев Земли, диагностика состояния фундаментов зданий, диагностика дорожных покрытий и аэродромных взлетно-посадочных полос, неразрушающий контроль в промышленности, томографические обследования в медицине. Этой проблемой занимаются ведущие ученые как в нашей стране, так и за рубежом [1-5]. В использованном в настоящей работе приближении мы предполагали, что среда распространения колебаний описывается скалярным волновым уравнением, компактные неоднородности связаны с изменениями фазовой скорости [6, 7]. В отличие от работ [8, 9], где зондирование неоднородностей проводилось источниками импульсного типа, в настоящей статье источники колебаний являются гармоническими осцилляторами. Это позволяет описать распространение колебаний уравнением Гельмгольца. Обратная

задача заключается в вычислении неизвестного коэффициента рефракции по измеренному в заданной области полю при различных положениях источников и приемников.

Рассматриваемая задача является трехмерной и нелинейной, т.е. вычислительно трудоемкой. Единственный путь решения этой проблемы состоит в использовании компьютеров с параллельной архитектурой [10-12]. В настоящей работе предложен линейризованный метод синтезированной апертуры, который в некоторых случаях, когда структура искомой неоднородности не слишком сложная, позволяет получать неплохие результаты. Структура предложенного алгоритма допускает выделение типовых алгоритмических структур. Поэтому в рассматриваемой задаче представляется перспективным использование реконфигурируемых многопроцессорных вычислительных систем с динамически перестраиваемой архитектурой.

Результаты лабораторного эксперимента позволяют определить предельные возможности разрабатываемой технологии диагностики в «идеальных» лабораторных условиях.

2. Математическая модель. Мы будем предполагать, что среда распространения звука не имеет тензорных свойств (только скалярные). Предположим также, что источник звука является гармоническим осциллятором, колеблющимся с заданной частотой. Амплитуда колебаний источника зависит от времени как $e^{-i\omega t}$, что позволяет описать распространение звука уравнением Гельмгольца:

$$\Delta u(r, q, \omega) + \kappa^2(r, \omega)u(r, q, \omega) = f(r, q, \omega), \quad (1)$$

где $r \in R^3$ - положение точки в пространстве, ω - круговая частота звука, $u(r, q, \omega)$ - скалярное волновое поле.

Пусть все неоднородности среды расположены в области R . Предположим, что источники звуковых волн (положения которых в пространстве характеризуются координатой q) расположены в области Q , а точки измерения скалярной функции $u(r, q, \omega)$ при фиксированной круговой частоте ω расположены в области P , не имеющей общих точек с R . Наоборот, области P и Q могут пересекаться и даже совпадать.

Функция $f(r, q, \omega)$ описывает источники, расположенные в области Q . Например, для гармонического осциллятора в точке $q \in Q$ эта функция имеет вид $f(r, q, \omega) = -\delta(\|r - q\|)$. Неоднородности в области R описываются функцией $\kappa(r, \omega)$. В простейшем случае, когда неоднородности вызваны только изменениями фазовой скорости

$c(r)$, имеет место соотношение $\kappa(r, \omega) = \omega / c(r)$. Вне области R будем предполагать для простоты $\kappa(r, \omega) = \omega / c_0$, где $c_0 = const$. Пусть $\xi(r) = c_0^{-2} - c^{-2}(r)$. Тогда (1) можно переписать в виде

$$\Delta u(r, q, \omega) + \frac{\omega^2}{c_0^2} u(r, q, \omega) = f(r, q, \omega) + \omega^2 \xi(r) u(r, q, \omega) \quad (2)$$

Вводим в рассмотрение функцию Грина

$$G(x, y, \omega) = -\frac{1}{4\pi \|x - y\|} \cdot \exp(i \frac{\omega}{c_0} \|x - y\|), \quad (3)$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\Delta G(x, y, \omega) + \frac{\omega^2}{c_0^2} G(x, y, \omega) = -\delta(\|x - y\|).$$

Теперь уравнение (2) можно переписать в виде объемного интегрального уравнения

$$u(r, q, \omega) = u_0(r, q, \omega) + \omega^2 \int_R G(r', r, \omega) \xi(r') u(r', q, \omega) dr', \quad (4)$$

где введено обозначение $u_0(r, q, \omega) = \int_Q G(r', r, \omega) f(r', q, \omega) dr'$

Раздельно записывая уравнение (4) для областей R и P , получаем нелинейную систему уравнений [7]

$$\begin{cases} u(r, q, \omega) = u_0(r, q, \omega) + \omega^2 \int_R G(r', r, \omega) \xi(r') u(r', q, \omega) dr', r \in R \\ U(p, q, \omega) = \omega^2 \int_R G(r', p, \omega) \xi(r') u(r', q, \omega) dr', p \in P \end{cases} \quad (5)$$

Прямая задача соответствует первому интегральному уравнению, в котором по заданному источнику и свойствам среды необходимо вычислить звуковое давление. В обратной задаче неизвестными считаются свойства среды и звуковое давление для различных частот. Известными считаются уравнения связи (5), в которых функция $U(p, q, \omega)$ получается как результат измерений в области расположения приемников.

3. Методы решения обратной задачи. Рассмотрим линейризованную модель задачи (5) (Борновское приближение), в которой полагаем функцию $u(r', q, \omega)$ под интегралом равной $u_0(r', q, \omega)$. В случае точечных источников (т.е. $f(r, q, \omega) = -\delta(\|r - q\|)$) имеем $u_0(r', q, \omega) = G(r', q, \omega)$. Таким образом, имеем

$$U(p, q, \omega) = u(p, q, \omega) - G(p, q, \omega) = \omega^2 \int_R G(r, p, \omega) G(r, q, \omega) \xi(r) dr, \quad (6)$$

где $G(r, q, \omega)$ - определяется выражением (3); точка $p \in P$ - определяет положение приемника; точка $q \in Q$ - определяет положение источника; $u(p, q, \omega)$ - функция, описывающая поле, может быть измерена в области измерений P ; $\xi(r)$ - неизвестная искомая функция, описывающая неоднородность; r - точка, вообще говоря, 3-мерной области R . Полученное уравнение (6) является интегральным уравнением 1 рода. Оно описывает постановку обратной задачи.

Рассмотрим практически важный случай, когда области P, Q - расположены на поверхности Земли и совпадают с плоскостью $z = 0$, где введена декартова система координат $OXYZ$ с осью Z направленной вниз, а плоскость OXY совпадает с поверхностью Земли. В этом случае функция Грина (3) может быть записана в виде

$$G(r, p, \omega) = - \frac{1}{4\pi \sqrt{(p_1 - r_1)^2 + (p_2 - r_2)^2 + r_3^2}} \cdot \exp\left(i \frac{\omega}{c_0} \sqrt{(p_1 - r_1)^2 + (p_2 - r_2)^2 + r_3^2}\right), \quad (7)$$

где $r = (r_1, r_2, r_3) \in R$, $p = (p_1, p_2, 0) \in P$. Т.е функция Грина зависит от разности аргументов

$G(r, p, \omega) = H(p_1 - r_1, p_2 - r_2, r_3, \omega)$. Для упрощения дальнейших выкладок аргументы с индексом 2 и ω писать не будем. Кроме того, будем предполагать, что неоднородность располагается на некоторой неизвестной глубине r_3 , и снимем интегрирование по r_3 в (6). Это предположение ограничивает класс неоднородностей $\xi(r)$, которые могут быть найдены рассматриваемым методом. Как будет видно далее, это приводит к плохому разрешению по глубине, однако если неоднородность имеет не слишком сложную структуру (например, состоит из нескольких, не перекрывающихся по горизонтальным

координатам объектов на разных глубинах), предлагаемый подход применим и позволяет получать хорошее разрешение по горизонтали. Таким образом, уравнение (6) запишется в виде

$$U(p_1, q_1) = \int H(p_1 - r_1, r_3) H(q_1 - r_1, r_3) \xi(r_1, r_3) dr_1, \quad (8)$$

где за пределами области R положили $\xi(r) = 0$ и интегрирование продолжено на всё пространство \mathfrak{R}^1 . Рассмотрим преобразование Фурье по переменным (p_1, q_1) , тогда

$$\tilde{U}(v_1, w_1) = \tilde{H}(v_1, r_3) \tilde{H}(w_1, r_3) \int \exp\{-i(v_1 + w_1)r_1\} \xi(r_1, r_3) dr_1,$$

где \tilde{U}, \tilde{H} - преобразование Фурье от U, H . Далее, можно записать

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{-1} \left[\frac{\tilde{U}(v_1, w_1)}{\tilde{H}(v_1, r_3) \tilde{H}(w_1, r_3)} \right] &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \exp\{i(xv_1 + yw_1)\} \left\{ \int \exp\{-i(v_1 + w_1)r_1\} \xi(r_1, r_3) dr_1 \right\} dv_1 dw_1 = \\ &= \int \delta(x - r_1) \delta(y - r_1) \xi(r_1, r_3) dr_1 = \delta(x - y) \xi(x, r_3), \quad (9) \end{aligned}$$

где \mathfrak{F}^{-1} - обратное преобразование Фурье по переменным (v_1, w_1) .

Формула (9) позволяет, используя процедуру быстрого дискретного преобразования Фурье, эффективно вычислять неоднородность $\xi(r)$ на глубине r_3 по измеренной на поверхности U и известной функции Грина H .

Как было отмечено выше, для упрощения мы выводили формулу (9) только для одной горизонтальной координаты. Для двух горизонтальных координат формула (9) принципиально не отличается (необходимо перейти от преобразования Фурье по двум переменным к преобразованию по четырем переменным).

Рассмотрим важный в практическом плане случай, когда искомая неоднородность зондируется источником, который располагается только в одном месте. В этом случае область Q расположения источников состоит из одной точки с координатами $(\hat{q}_1, \hat{q}_2, 0)$. В практическом плане подобный подход позволяет значительно снизить расходы, связанные с проведением эксперимента. Как нетрудно

получить, формула (9) в этом случае для двух горизонтальных координат (r_1, r_2) при фиксированной глубине r_3 примет вид

$$\mathfrak{I}^{-1} \left[\frac{\tilde{U}(v_1, v_2)}{\tilde{H}(v_1, v_2, r_3)} \right] = \bar{\xi}(r_1, r_2, r_3) \quad (10)$$

где $\bar{\xi}(r_1, r_2, r_3) = H(\hat{q}_1 - r_1, \hat{q}_2 - r_2, r_3) \xi(r_1, r_2, r_3)$. Как видно, $\bar{\xi}(r_1, r_2, r_3)$ отличается от $\xi(r_1, r_2, r_3)$ только на известный комплексный множитель.

Формула (10) позволяет эффективно вычислять неоднородность $\xi(r)$ на выбранной глубине r_3 . Как можно видеть, обратная задача решается для каждой глубины r_3 независимо. Поэтому алгоритм решения трехмерной обратной задачи распараллеливается очевидным образом: каждый процессор решает задачу по формуле (10) для своей глубины r_3 . Это позволяет проводить расчеты трехмерной обратной задачи на параллельном компьютере практически с линейной масштабируемостью.

4. Постановка лабораторного акустического эксперимента.

Численные методы открывают широкие возможности по расчету как прямых, так и обратных задач для различных схем эксперимента. Однако даже современные математические подходы и высокопроизводительные вычислительные системы не могут дать ответа на ряд принципиальных вопросов. Основной из них – это адекватность используемой модели. Поэтому принципиальное значение имеет проведение физических экспериментов. Цель лабораторного эксперимента состоит в решении следующих проблем:

- проверка адекватности используемой математической модели (скалярной волновой модели),
- разработка методов получения высокоточных данных эксперимента,
- оценка реальных уровней шумов в идеальных условиях лабораторного эксперимента,
- проверка состоятельности схемы эксперимента.

Как известно, при акустическом зондировании в замкнутых помещениях возникает отражение от стен, которое накладывается на полезный сигнал и существенно искажает данные. В связи с этим, лабораторный эксперимент был проведен в акустической комнате (физфак МГУ), характеризующейся очень низким коэффициентом

отражения от стен. Это позволяет моделировать бесконечную среду в условиях комнаты порядка 6х7х9 м. Размеры комнаты накладывают ограничения на частотный диапазон излучения. Целесообразно проведение эксперимента в диапазоне частот порядка нескольких десятков кГц. Для создания неоднородностей в однородной среде были использованы предметы, подвешенные в воздухе. Размеры объектов от 1 до 40 см. Расстояние от источников и приемников до объектов от 5 см до 100 см. Для точного измерения фазы принимаемой волны осуществлялось позиционирование сетки приемников и источников с точностью не менее $\frac{1}{20}$ длины волны на сетке с шагом не менее $\frac{1}{2}$ длины волны.

Для уверенного разделения исходного сигнала и эха, длительность сигнала ограничивалась 5-10 периодами. Требования к приемнику сигнала определялись, во-первых, длиной волны (приемник должен быть достаточно мал для регистрации эхо-сигнала данной частоты), и, во-вторых, динамическим диапазоном для регистрации сигналов, как от близких, так и от удаленных объектов.

Система регистрации обеспечивала разрешение не менее 8 бит на отсчет и не менее 20-25 отсчетов на период сигнала. Для этого была разработана и изготовлена специальная аппаратура регистрации, удовлетворяющая указанным требованиям.

Лабораторный эксперимент не дает возможность полностью моделировать реальное распространение излучения в приповерхностных слоях Земли, но является необходимым шагом навстречу реальной задаче.

5. Схема лабораторного эксперимента. Схема лабораторного эксперимента приведена на рис. 1.

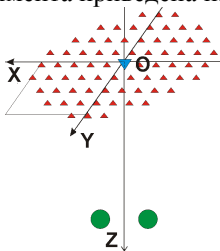


Рис. 1. Схема эксперимента

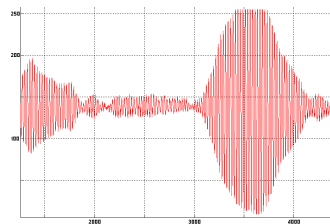


Рис. 2. Характерный вид результата оцифровки регистрирующей системой отраженного сигнала.

В акустической комнате (с низким коэффициентом отражения от стен) на одной высоте были подвешены два пластмассовых шара диаметром 6 см. на расстоянии 15 см. Шары были заполнены водой, что

позволило увеличить коэффициент отражения акустической волны. На расстоянии 50 см. над шарами располагался акустический источник. Пусть начало декартовой системы координат совпадает с положением источника, ось Z направлена вниз, ось X вдоль шаров. Тогда координаты шаров $(7.5; 0.; 50.)$ и $(-7.5; 0.; 50.)$. Измерения отраженной от шаров акустической волны проводилось в плоскости $Z = 0$. Размер приемника был выбран достаточно малый около 0.3 см, шаг измерений составлял 0.3 см по оси X . С целью ослабления прямого сигнала между источником и приемником, источник был помещен в вертикальную трубу. Шаг по оси Y составлял 1 см. Область, где проводились измерения, представляла собой примерно сектор одного квадранта радиусом 24 см. Всего были проведены измерения отраженных волн примерно в 1300 точках.

6. Численные расчеты и обсуждение результатов реального эксперимента. Характерный вид отраженного сигнала, записанного регистрирующей системой приведен на рис. 2. Частота оцифровки позволяла получать около 24 отсчетов на период волны. По горизонтальной оси отложен номер отсчета, по вертикальной - амплитуда волны. В левой части графика виден ослабленный прямой сигнал от источника, в правой – отраженный сигнал от двух шаров.

Каждый отраженный сигнал прошел этап предварительной обработки, в ходе которой была получена амплитуда и фаза сигнала. Полученные комплексные данные были использованы в качестве исходных измерений задачи. На рис.3 приведена реальная часть исходных данных в плоскости OXY на сетке с шагом 0.3 см по оси X и 1 см по оси Y .

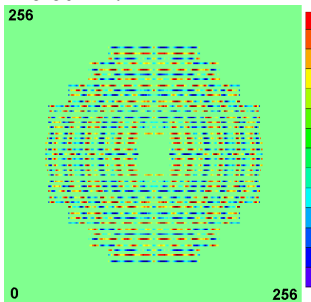


Рис. 3. Результаты детектирования реальных экспериментальных данных в прямой задаче на плоскости OXY (действительная часть волны).

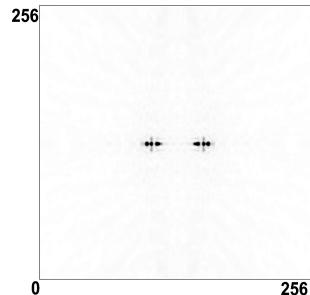


Рис. 4. Результаты реконструкции реальных экспериментальных данных (сечение в плоскости OXY).

Таким образом, реализована схема лабораторного эксперимента с неоднородностью в виде двух шаров, располагающихся в однородной среде (воздух). Использовано одно положение источника, зондирующего неоднородность на одной частоте, и около 5000 положений приемника на круге радиуса 24 см в плоскости OXY.

Решение обратной задачи для данной схемы эксперимента основывалось на формуле (10). Значение параметра глубины r_3 менялось перебором по сетке в выбранном диапазоне значений.

На рис.4 приведены результаты решения обратной задачи по исходным данным. Поскольку предлагаемый метод имеет гораздо лучшее разрешение по горизонтальным координатам, чем вертикальной, то приведено сечение в горизонтальной плоскости амплитуды полученного изображения. Как видно, полученное решение показывает наличие двух непересекающихся в плоскости XY областей, соответствующих двум шарам-неоднородностям в эксперименте.

Из рис.4 видно, что предлагаемый метод синтезированной апертуры позволяет с высоким разрешением надежно восстанавливать структуру неоднородности по горизонтальным координатам. По вертикальной координате z разрешение восстановленного изображения хуже.

7. Заключение. Рассматриваемая в работе проблема, в целом, является трехмерной и нелинейной, что приводит к большой размерности задач и требует огромного объема вычислений и оперативной памяти. Для решения этой проблемы, вообще говоря, необходимо использование суперкомпьютеров.

Предлагаемые линейные методы синтезированной апертуры позволяют получать достаточно содержательные результаты, если неоднородность имеет не слишком сложную структуру (например, состоит из нескольких, не перекрывающихся по горизонтальным координатам объектов на разных глубинах), Метод демонстрирует очень хорошее разрешение по горизонтали, что подтверждает адекватность используемой математической модели. Дальнейшее улучшение качества реконструкции изображения по глубине требует усложнение схемы эксперимента (большое количество положений источника) и методов обработки данных.

Спецификой предлагаемого приближения является то, что решение трехмерной обратной задачи распадается на независимое послойное (по глубине) восстановление структуры искомой неоднородности. Это позволяет предложить параллельные алгоритмы с практически с линейной масштабируемостью.

Структура алгоритма предполагает многократное использование процедур преобразования Фурье, умножения векторов. Поэтому

использование реконфигурируемых многопроцессорных вычислительных систем с динамически перестраиваемой архитектурой является перспективным для решения рассматриваемой задачи.

Как видно из результатов обработки, для получения надежных результатов необходима регистрация большого объема данных с высокой точностью. Необходимым требованием проводимых измерений экспериментальных данных является измерение как действительной, так и мнимой части волны.

Полученные результаты обработки реальных лабораторных данных позволяют оптимистично смотреть на перспективы дальнейших исследований в рассматриваемой задаче диагностики трехмерных сред.

1. J. Claerbout "Imaging the Earth's interior", Blackwell Scientific Publishers, 1986.

2. E. Robinson, T.S. Durrani, L.G. Peardon "Geophysical signal processing". Prentice Hall, 1986.

3. J. Gazdag, P. Squazzero "Migration of seismic data" // Proceedings of the IEEE, 72:1302-1315, 1984.

4. O. Yilmaz, "Seismic Data Processing" // Tulsa: Society of Exploration Geophysicists, 1987.

5. E. Baysal, D.D. Kosloff, J.W.C. Sherwood "Reverse time migration" // Geophysics. 1983. 48. 1514-1524.

6. Bakushinsky A.B., Goncharsky A.V. "Ill-posed Problems. Theory and Applications" // Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1994.

7. Bakushinsky A.B., Goncharsky A.V., Romanov S.Yu., S. Seatzu "On the identification of velocity in seismic and in acoustic sounding" // Firenze, 1994.

8. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Об одной трехмерной задаче диагностики в волновом приближении // ЖВМ и МФ. 2000. 40. - №9. - С.1364-1367.

9. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Об одной задаче компьютерной томографии в волновом приближении // Вычислительные методы и программирование, 2006. - Т.7. - № 1. - С.40-45.

10. Гончарский А.В., Романов С.Ю., Харченко С.А. Обратные задачи диагностики с синтезированной апертурой // Труды Международной научной конференции "Параллельные вычислительные технологии". – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. - Т.1. – С.109-114.

11. Гончарский А.В., Романов С.Ю., Харченко С.А. Обратная задача акустической диагностики трехмерных сред // Вычислительные методы и программирование, 2006. - Т.7. - №1. - С.117-126.

12. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Разработка методов компьютерной томографии в нелинейном волновом приближении с использованием суперкомпьютеров // Материалы Всероссийской научной конференции "Научный сервис в сети ИНТЕРНЕТ". – Новороссийск: Изд-во Московского Университета, 2006. - С.172-175.